УДК 539.3

Соболь В.Н.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ СТЕРЖНЕЙ НА БАЗЕ СМЕШАННОГО ВАРИАЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков, Сумская 40, 61002

Sobol V.N.

NUMERICAL SOLUTIONS OF CREEP PROBLEMS FOR BEAMS BY USING MIXED VARIATIONAL FUNCTIONAL

Kharkiv National University of Civil Engineering and Architecture, Kharkov, Sumskaya 40, 61002

Аннотация. В статье рассматривается вариационная постановка задачи ползучести и повреждаемости стержней на базе смешанного вариационного функционала. Предложен метод решения данной задачи. Представлены численные результаты исследования ползучести и повреждаемости жестко закрепленных стержней.

Ключевые слова: ползучесть, повреждаемость, смешанный функционал, вариационно-структурный метод.

Abstract. The variational statement of creep-damage problems for beams by using mixed variational functional is described in the paper. A solution method for such problem is given. The numerical solutions of creep-damage problem for clamped beams are presented.

Key words: creep, damage, mixed functional, variational-structural method.

Вступление.

Анализ прочности машиностроительной техники в современных условиях невозможно выполнить без привлечения научно обоснованных методов механики и информационных технологий. Условия эксплуатации и изготовлении деталей такой техники и элементов конструкций характеризуются высоким уровнем температуры, что влечет за собой рассмотрения такого явления, как ползучесть. Для многих ответственных элементов машиностроительных конструкций используют расчетные схемы отвечающие тонкостенным стержням.

Обзор литературы.

Возможности методов, базирующихся на решении дифференциальных уравнений краевых задач теории упругости, пластичности и ползучести весьма ограничены. Известно, что вариационные постановки таких задач служат удобной основой для построения и теоретического обоснования многих расчетов сложных конструкций [1]. В работе предложен эффективный метод расчета ползучести стержней на базе смешанного вариационного функционала и вариационно-структурного метода [2]. Такие подходы к решению задач прочности конструктивных элементов машин привлекают внимание многих исследователей, что объясняет актуальность темы исследований и проведенных результатов в данной статье

Входные данные и методы.

Рассмотрим общую постановку ползучести и повреждаемости тел. В декартовых координатах рассмотрим пространственное тело объемом *V*, поверхностью *S:* $S = S_t \bigcup S_u$, S_t, S_u - части поверхности тела, на которых заданы внешние распределенные силы и условия закрепления. Используя обычно применяемые обозначения, полную систему уравнений начально-краевой задачи ползучести относительно неизвестных компонент тензоров напряжений, деформаций и перемещений для тела, при заданных объемных, поверхностных силах запишем в виде:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0\,,\ \varepsilon_{ij} = 1/2(u_{j,i} + u_{i,j})\,,\ \varepsilon_{ij} = d_{ijkl}\sigma_{kl} + c_{ij}\,,\ x_i \in V$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \ \text{-}\ x_i \in S_t\,,\ u_i - u_i^* = 0 \ \text{-}\ x_i \in S_u\,, \tag{1}$$

Для такого случая смешанный вариационный функционал относительно неизвестных компонент тензоров перемещений, напряжений и деформаций ползучести при заданных объемных, поверхностных силах имеет вид:

$$R_{u\sigma} = \iiint\limits_V \left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \sigma_{ij}C_{ij} - \Lambda(\sigma_{ij}) - \rho f_i u_i \right] dV -$$

$$-\iint\limits_{S_t} p_i u_i dS - \iint\limits_{S_u} n_i \sigma_{ij}(u_j - u_j^*) dS\,. \quad (2)$$

Из вариационного равенства $\delta R_{u\sigma} = 0$ для данного функционала получаем систему уравнений соответствующую уравнениям (1).

Для определения деформаций ползучести C_{ij} и параметра повреждаемости система уравнений (1) дополняется уравнениями состояния ползучести вида:

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2}\cdot\frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^l}\cdot s_{ij}\,,\ \dot{\omega} = \frac{D(\langle\sigma_e\rangle)^k}{(1-\omega)^l}\,,\ \omega(0) = 0\,,\ \omega(t_*) = \omega_*\,,$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij}^0 - \frac{1}{3}\sigma_{rs}^0\delta_{rs}\delta_{ij}\,,\ \langle\sigma_e\rangle = \begin{cases} \alpha\sigma_I + (1-\alpha)\cdot\sigma_i, & \sigma_e > 0 \\ 0, & \sigma_e \le 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где B, D, n, m, k, l - экспериментально определяемые константы, σ_I - максимальное главное напряжение, σ_i - интенсивность напряжений, α - параметр, отражающий тип разрушения материала ($0 \le \alpha \le 1$).

Используя значения напряжений из системы уравнений (1) в начальный момент времени, выполняется интегрирование уравнений состояния ползучести вида (3) с использованием метода Рунге-Кутта в модификации Мерсона и продолжается решение по времени на основе смешанного вариационного функционала (2). Даннам методика изложена подробно в работе [3].

Решение вариационного равенства для функционала Рейсснера на шаге времени осуществлялось вариационно–структурным методом. Структуры решений для неизвестных функций W, M - прогибов и изгибающих моментов, определенных в точках координатной оси стержня приняты в виде:

$$W = \varpi\sum_{i=0}^{N} B_i P_i^w\,,\ M = \sum_{i=1}^{N} A_i P_i^{ì}\,,\ \varpi = \left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{z}{l}\right)^2. \quad (4)$$

Здесь, соответственно, P_i - полиномы i-ой степени, A_i, B_i, - коэффициенты аппроксимации, а ϖ - функция, позволяющая удовлетворить принятыми выше структурами граничным условиям.

Результаты. Обсуждение и анализ

По предложенному алгоритму решения задач ползучести в работе выполнены численные исследования. Для изучения сходимости численных решений и исследований закономерностей ползучести в работе рассмотрен стержень прямоугольного поперечного сечения с жестко защемленными краями, выполненного из материала Д16АТ. Стержень при температуре 300^0C деформируется в условиях ползучести под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки *q*=2,5 кН/м. Параметры стержня в расчетах приняты следующими: длина *L*=2 м, ширина *b*=0.01 м, высота *h*=0.1 м. Оси 0z и 0x направлены вдоль длины и высоты стержня соответственно.

Физико-механические постоянные изотропного сплава Д16АТ в уравнениях состояния ползучести, как и в работе [1], при температуре *T*=300^0C, принято равными: $E = 65\text{ÃÏ à}$, $B = 0.34 \cdot 10^{-7}\text{Ì Ï }\text{à}^{-n}/\div$, $D = 1.9 \cdot 10^{-7}\text{Ì Ï }\text{à}^{-m}/\div$, $n = m = k = l = 2.93$, $\alpha = 0$, $\nu = 0.3$.

На рис.1 приведены эпюры нормальных напряжений в сечении стержня, представлены изменения прогибов стержня для разных моментов времени: 1 – в начальный, 2 – в момент времени 23 часа и 3 – в момент близкий к завершению скрытого разрушения - 46 часов.

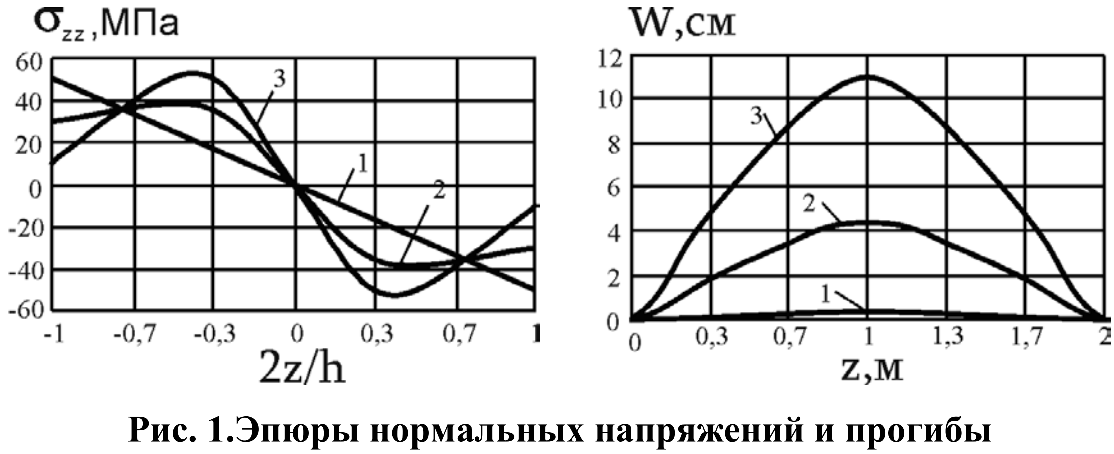

Рис. 1.Эпюры нормальных напряжений и прогибы

Расчеты проводились с удержанием 6 – ти базисных функций в аппроксимациях прогиба и изгибающего момента вдоль длины стержня. Сетка для нахождения компонент необратимой деформации ползучести и параметра повреждаемости выбиралась следующей : 41 точка вдоль длины стержня и 7 точек – по высоте сечения стержня.

Заключение и выводы.

В статье рассмотрена ползучесть и повреждаемость стержней на базе смешанного вариационного функционала. Расчетами установлено, что с увеличением числа базисных функций и количества точек области дискретизации результаты расчетов практически не изменяются. Рост деформаций ползучести приводит к существенному увеличению прогиба стержня с течением времени и перераспределению нормальных напряжений особенно в зоне жесткого закрепления стержня.

Литература:

1. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград, изд.-во ЛГУ, 1978 г., 222с.

2. Рвачев В.Л. Теории R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982 – 552с.

3. Морачковский О.К., Соболь В.Н. Метод решения задач ползучести тел на основе смешанного вариационного принципа // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2003. – № 12, Т.1 – С. 84-89.

Статья отправлена: 19.11.2015 г.