SWorld – 1-12 October 2014
http://www.sworld.education/index.php/ru/conference/the-content-of-conferences/archives-of-individual-conferences/oct-2014
SCIENTIFIC RESEARCHES AND THEIR PRACTICAL APPLICATION. MODERN STATE AND WAYS OF DEVELOPMENT ‘2014
Физика и математика. Математика.

УДК 517.587

Галкин В.М., Ерофеева Л.Н., Лещева С.В.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОШИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, ул. Минина 24, 603950

Galkin V.M., Erofeeva L.N., Leshcheva S.V.

ORTHOGONAL POLYNOMIALS ASSOCIATING WITH CAUCHY DISTRIBUTION

Nizhny Novgorod state technical university named after R.Y. Alekseev
Nizhny Novgorod, Minina str. 24 603950

Аннотация. Построена новая система ортогональных многочленов.

Ключевые слова: вероятностное распределение, ортогональные многочлены, непрерывные дроби.

Abstract. A new orthogonal polynomial system is constructed.

Key words: probability distribution, orthogonal polynomials, continued fractions.

С каждым вероятностным распределением можно связать систему ортогональных многочленов $\{P_n(x),\ n=0,1,2,...\}$, определяемую условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)P_m(x)dF(x),\ m \neq n\,.$$

Здесь $F(x)$ – функция распределения.

Так стандартные распределения – нормальное, экспоненциальное и равномерное – приводят к полиномам Эрмита, Лагерра и Лежандра.

В [1] при построении оценок параметра «a» в распределении Коши с плотностью $f'(x)=F'(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+x^2}$ использовалось связанное с ним распределение с плотностью вида $\frac{\lambda}{\operatorname{ch}\mu x}$. Возникает вопрос о построении системы ортогональных многочленов для этого распределения.

Пусть $EL_n(x) = x^n + \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots -$ многочлены такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} EL_n(x) EL_m(x) \frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x} = 0,\ m \neq n.$$

Из общей теоремы ортогональных многочленов ([2]) следует, ввиду четности весовой функции, существование рекуррентного соотношения

$$EL_{n+1}(x) = xEL_n(x) + a_n EL_{n-1}(x).$$

Наблюдения над первыми многочленами, построенными с помощью процесса ортогонализации, позволили предположить, что $a_n = -\frac{1}{4}n^2$ и в дальнейшем доказать это строго.

Найдена производящая функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} EL_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{2x \operatorname{arctg}\frac{t}{2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}}.$$

Получено разложение в непрерывную дробь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} \cdot \frac{dt}{\operatorname{ch}\pi t} = 2x\left[\frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{x^2 + \frac{9}{4}} + \frac{1}{x^2 + \frac{25}{4}} - \cdots\right] = \cfrac{1}{x - \cfrac{1^2/4}{x - \cfrac{2^2/4}{x - \cfrac{3^2/4}{x - \ldots}}}}.$$

Знаменатели подходящих дробей дают $EL_n(x)$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Приводим таблицу первых многочленов

n	$EL_n(x)$
0	1
1	x

2	$x^2-\frac{1}{4}$
3	$x^3-\frac{5}{4}x$
4	$x^4-\frac{7}{2}x^2+\frac{9}{16}$
5	$x5-\frac{15}{2}x^3+\frac{89}{16}x$
6	$x^6-\frac{55}{4}x^4+\frac{439}{16}x^2-\frac{225}{64}$
7	$x^7-\frac{91}{4}x^5+\frac{1519}{16}x^3-\frac{3429}{64}x$
8	$x^8-35x^6+\frac{2107}{8}x^4-\frac{6235}{16}x^2+\frac{11025}{256}$
9	$x^9-51x^7+\frac{5019}{8}x^5-\frac{30539}{16}x^3+\frac{230481}{256}x$
10	$x^{10}-\frac{285}{4}x^8+\frac{10689}{8}x^6-\frac{231745}{32}x^4+\frac{2250621}{256}x^2-\frac{893025}{1024}$

Литература:

1. Галкин В.М., Ерофеева Л.Н., Лещева С.В. «Оценки параметра распределения Коши», Труды НГТУ им. Р.Е.Алексеева, 2014, № 2, стр. 314-319.

2. Г.Сегё. Ортогональные многочлены. М.1962

Статья отправлена: 22.09.2014г.